

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Заведующий кафедрой  
теории функций и геометрии

  
Семенов Е.М.  
подпись, расшифровка подписи  
23.03.2025 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

### Б1.О.15 Математическое моделирование разностных уравнений

*Код и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом*

**1. Код и наименование направления подготовки:**

02.04.01 Математика и компьютерные науки

**2. Профиль подготовки:**

Математические методы и компьютерные технологии в естествознании, экономике и управлении

Математическое и компьютерное моделирование

**3. Квалификация выпускника:** магистр

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**

Кафедра теории функций и геометрии

**6. Составители программы:** Мелешенко Петр Александрович, к. ф.-м. н, доцент, доцент кафедры теории функций и геометрии

**7. Рекомендована:** Научно-методическим Советом математического факультета, Протокол № 0500-03 от 18.03.2025 г.

**8. Учебный год:** 2026/2027

**Семестр(ы): 4**

## **9. Цели и задачи учебной дисциплины**

*Целями изучения учебной дисциплины является:*

- формирование у студентов комплекса знаний, умений и навыков в области математического моделирования разностных уравнений;
- формирование у студентов комплекса знаний, умений и навыков в области работы с математическим пакетом SIMULINK.

*Задачи дисциплины:*

- изучить основные подходы к решению класса разностных уравнений и их математического моделирования.

## **10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:**

Дисциплина «Математическое моделирование разностных уравнений» относится к дисциплинам блока Б1 основной профессиональной образовательной программы направления подготовки 02.04.01 – Математика и компьютерные науки – Магистр.

Дисциплина «Математическое моделирование разностных уравнений» базируется на знаниях, полученных в рамках изучения дисциплин «Линейная алгебра», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Моделирование динамических процессов», а также предшествующих математических дисциплин, использующих соответствующие методы.

## **11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:**

Код	Название компетенции	Коды	Индикаторы	Планируемые результаты обучения
ОПК-2	Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, совершенствовать и разрабатывать концепции, теории и методы	ОПК-2.1 ОПК-2.2 ОПК-2.3	Владеет навыками создания и исследования новых математических моделей в естественных науках  Умеет использовать математические модели в профессиональной деятельности  Имеет практический опыт создания и исследования подобных математических моделей и разработки теорий и методов для их описания	Знать: современные методы и классические результаты построения математических моделей, методы и способы применения математических моделей в профессиональной деятельности; современные методы разработки и реализации математических моделей.  Уметь: использовать изученные методы для создания и исследования математических моделей и использовать их в профессиональной деятельности; строить математические модели изучаемых систем; решать задачи, используя аналитические методы и программные средства.  Владеть: практическим опытом создания и исследования подобных математических моделей и разработки теорий и методов для их описания; современными методами разработки и реализации математических моделей.

ОПК-3	Способен самостоятельно создавать прикладные программные средства на основе современных информационных технологий и сетевых ресурсов, в том числе отечественного производства	ОПК-3.1	Обладает фундаментальными знаниями в области прикладного программирования и информационных технологий	Знать: современные методы прикладного программирования, пакеты вычислительных программ и основы информационных технологий. Уметь: разрабатывать прикладные программные продукты моделирования современных систем в рамках современных пакетов вычислительных программ. Владеть: современными методами использования программных средств при моделировании прикладных задач естественных наук
		ОПК-3.2	Умеет использовать прикладные программные средства в профессиональной деятельности	
		ОПК-3.3	Имеет практический опыт применения программных средств, используемых при построении математических моделей в естественных науках	

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.** — 3/108.

**Форма промежуточной аттестации** - экзамен.

### **13. Трудоемкость по видам учебной работы**

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	Всего	По семестрам		
		№ семестра	4 семестр	...
Контактная работа	30		30	
в том числе:	лекции	10		10
	практические	-		-
	лабораторные	20		20
Самостоятельная работа	42		42	
Форма промежуточной аттестации (экзамен – 36 час.)	36		36	
<b>Итого:</b>	<b>108</b>		<b>108</b>	

#### **13.1. Содержание дисциплины**

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			

1.1	Основные свойства разностных уравнений.	Примеры разностных уравнений. Решение однородных разностных уравнений. Системы линейных разностных уравнений. Синтез разностных уравнений для получения заданных функций.	<a href="https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660">https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660</a> -----
1.2	Применение жордановых цепочек векторов при решении дифференциальных и разностных уравнений.	Корневые векторы и циклические пространства. Жордановы цепочки векторов. Дифференциальные уравнения и жордановы цепочки векторов. Разностные уравнения и жордановы цепочки векторов.	<a href="https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660">https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660</a> -----
1.3	Разностные уравнения и z-преобразование.	Определение z-преобразования. Решение разностных уравнений с помощью z-преобразования. Цифровые интеграторы и дискретные передаточные функции.	<a href="https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660">https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660</a> -----
1.4	Структурные модели разностных уравнений.	Модели уравнений с начальными условиями. Примеры моделирования в пакете SIMULINK. Моделирование уравнений с краевыми условиями. Матричное решение разностных уравнений.	<a href="https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660">https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660</a> -----
1.5	Нелинейные разностные уравнения.	Источники нелинейных разностных уравнений. Решение нелинейных разностных уравнений. Анализ стационарных точек и точек бифуркации.	<a href="https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660">https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660</a> -----
<b>2. Лабораторные занятия</b>			
2.1	Основные свойства разностных уравнений.	Примеры разностных уравнений. Решение однородных разностных уравнений. Системы линейных разностных уравнений. Синтез разностных уравнений для получения заданных функций.	<a href="https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660">https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660</a> -----
2.2	Применение жордановых цепочек векторов при решении дифференциальных и разностных уравнений.	Корневые векторы и циклические пространства. Жордановы цепочки векторов. Дифференциальные уравнения и жордановы цепочки векторов. Разностные уравнения и жордановы цепочки векторов.	<a href="https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660">https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660</a> -----
2.3	Разностные уравнения и z-преобразование.	Определение z-преобразования. Решение разностных уравнений с помощью z-преобразования. Цифровые интеграторы и дискретные передаточные функции.	<a href="https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660">https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660</a> -----
2.4	Структурные модели разностных уравнений.	Модели уравнений с начальными условиями. Примеры моделирования в пакете SIMULINK. Моделирование уравнений с краевыми условиями. Матричное решение разностных уравнений.	<a href="https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660">https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660</a> -----
2.5	Нелинейные разностные уравнения.	Источники нелинейных разностных уравнений. Решение нелинейных разностных уравнений. Анализ стационарных точек и точек бифуркации.	<a href="https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660">https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660</a> -----

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/ п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)					
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Контроль	Всего

1	Основные свойства разностных уравнений.	2		4	5		11
2	Применение жордановых цепочек векторов при решении дифференциальных и разностных уравнений.	2		4	10		16
3	Разностные уравнения и z-преобразование.	2		4	10		16
4	Структурные модели разностных уравнений.	2		4	7		13
5	Нелинейные разностные уравнения.	2		4	10		16
	Итого:	10		20	42		72

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе освоения дисциплины студенты должны посетить лекционные и лабораторные занятия и сдать экзамен.

Указания для освоения теоретического и практического материала и сдачи экзамена:

1. Обязательное посещение лабораторных занятий по дисциплине с конспектированием излагаемого преподавателем материала в соответствии с расписанием занятий.
2. Получение в библиотеке рекомендованной учебной литературы и электронное копирование рабочей программы с методическими рекомендациями, конспекта лекций.
3. Копирование (электронное) перечня вопросов к зачету по дисциплине, а также списка рекомендованной литературы из рабочей программы дисциплины.
4. При подготовке к лабораторным занятиям по дисциплине необходимо изучить рекомендованный преподавателем материал, иметь при себе конспекты соответствующих тем и необходимый справочный материал.
5. Рекомендуется следовать советам преподавателя, связанным с освоением предлагаемого материала, провести самостоятельный Интернет - поиск информации (видеофайлов, файлов-презентаций, файлов с учебными пособиями) по ключевым словам курса и ознакомиться с найденной информацией при подготовке к экзамену по дисциплине.

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (лекций и лабораторные занятия) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность в семестре, на которую отводится 42 часа.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Математическое моделирование разностных уравнений» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам лекционных и лабораторных занятий (приведены выше), самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущим аттестациям (выполнению лабораторных заданий).

Вопросы лекционных и лабораторных занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и лабораторным занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмыслившими студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учить недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (4 семестр – экзамен).

## **15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины**

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Гордин, Владимир Александрович. Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решать : [учебное пособие по специальности "Прикладная математика" для студ. естеств.-науч. специальностей] / В.А. Гордин ; Нац. исслед. ун-т "Высш. шк. экономики". — Москва : Издательский дом Высшей школы экономики, 2016 .— 529, [1] с. : ил. — (Учебники Высшей школы экономики (ВШЭ)) .— Библиогр.: с.519-523 .— Предм. указ: с.524-[530] .— ISBN 978-5-7598-1094-0.
2	Миролюбов, Анатолий Алексеевич. Однородные разностные уравнения : Учебное пособие / А.А. Миролюбов, М.А. Солдатов ; Горковский гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского .— Горький : Издание ГГУ, 1975 .— 182,[1] с. : ил.
3	Миролюбов, Анатолий Алексеевич. Линейные неоднородные разностные уравнения / А.А. Миролюбов, М.А. Солдатов ; Под ред. А.Ф. Леонтьева .— М. : Наука, 1986 .— 126,[1] с. : ил.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
4	Мироновский, Леонид Алексеевич. Моделирование разностных уравнений Учебное пособие / Л.А. Мироновский; СПбГУАП. СПб., 2004. 108 с.: ил. ISBN 5-8088-0135-4
5	Hassan Sedaghat Nonlinear difference equations. Theory with applications to social science models Springer Dordrecht <a href="https://doi.org/10.1007/978-94-017-0417-5">https://doi.org/10.1007/978-94-017-0417-5</a> , ISBN 978-90-481-6215-4 Published: 07 December 2010

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
6	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – ( <a href="http://www.lib.vsu.ru/">http://www.lib.vsu.ru/</a> )
7	<a href="https://eqworld.ipmnet.ru/ru/solutions/fe/fe-toc1.htm">https://eqworld.ipmnet.ru/ru/solutions/fe/fe-toc1.htm</a>
8	<a href="https://pocketteacher.ru/solve-equation-with-differences-ru">https://pocketteacher.ru/solve-equation-with-differences-ru</a>

## **16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы**

с	Источник
1	Гордин, Владимир Александрович. Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решать : [учебное пособие по специальности "Прикладная математика" для студ. естеств.-науч. специальностей] / В.А. Гордин ; Нац. исслед. ун-т "Высш. шк. экономики". — Москва : Издательский дом Высшей школы экономики, 2016 .— 529, [1] с. : ил. — (Учебники Высшей школы экономики (ВШЭ)) .— Библиогр.: с.519-523 .— Предм. указ: с.524-[530] .— ISBN 978-5-7598-1094-0.

2	<i>Миролюбов, Анатолий Алексеевич. Однородные разностные уравнения : Учебное пособие / А.А. Миролюбов, М.А. Солдатов ; Горковский гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского .— Горький : Издание ГГУ, 1975 .— 182,[1] с. : ил.</i>
3	<i>Миролюбов, Анатолий Алексеевич. Линейные неоднородные разностные уравнения / А.А. Миролюбов, М.А. Солдатов ; Под ред. А.Ф. Леонтьева .— М. : Наука, 1986 .— 126,[1] с. : ил.</i>
4	<i>Мироновский, Леонид Алексеевич. Моделирование разностных уравнений5 Учебное пособие / Л.А. Мироновский; СПбГУАП. СПб., 2004. 108 с.: ил. ISBN 5-8088-0135-4</i>
5	<i>Hassan Sedaghat Nonlinear difference equations. Theory with applications to social science models Springer Dordrecht <a href="https://doi.org/10.1007/978-94-017-0417-5, ISBN 978-90-481-6215-4">https://doi.org/10.1007/978-94-017-0417-5, ISBN 978-90-481-6215-4</a> Published: 07 December 2010</i>

## **17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):**

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, актуализация личного и учебно-профессионального опыта обучающихся, включение элементов дистанционных образовательных технологий.

В лабораторной части курса используется стандартное современное программное обеспечение персонального компьютера.

В части освоения материала лекционных и лабораторных занятий, самостоятельной работы по отдельным разделам дисциплины, прохождения текущей и промежуточной аттестации может применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.( <https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=29660> )

## **18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Для проведения лабораторных занятий требуется компьютерный класс: специализированная мебель, маркерная доска, персональные компьютеры Ubuntu (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ubuntu.com/download/desktop>) Visual Studio Community (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия <https://visualstudio.microsoft.com/ru/vs/community/>) LibreOffice (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ru.libreoffice.org/about-us/license/>);

## **19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Основные свойства разностных уравнений.	ОПК-2	ОПК-2.1 ОПК-2.2 ОПК-2.3	Лабораторная работа 1
2.	Применение жордановых цепочек векторов при решении дифференциальных и разностных уравнений.	ОПК-2	ОПК-2.1 ОПК-2.2 ОПК-2.3	Лабораторная работа 2

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
3.	Разностные уравнения и z-преобразование.	ОПК-2	ОПК-2.1 ОПК-2.2 ОПК-2.3	Лабораторная работа 3
4.	Структурные модели разностных уравнений.	ОПК-2 ОПК-3	ОПК-2.1 ОПК-2.2 ОПК-2.3 ОПК-3.1 ОПК-3.2 ОПК-3.3	Лабораторная работа 4
5	Нелинейные разностные уравнения.	ОПК-2 ОПК-3	ОПК-2.1 ОПК-2.2 ОПК-2.3 ОПК-3.1 ОПК-3.2 ОПК-3.3	Лабораторная работа 5
Промежуточная аттестация форма контроля - экзамен				Перечень вопросов к экзамену

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Оценка знаний, умений, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей (устный опрос) и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в форме устного опроса. Кроме того, учитывается успешное выполнение индивидуальных лабораторных работ.

#### Лабораторная работа 1.

Аналитическое решение однородных и неоднородных разностных уравнений и их систем посредством системы символьной математики.

#### Лабораторная работа 2.

Построение жордановой цепочки векторов для решения разностных уравнений с кратными корнями характеристического полинома. Реализация алгоритма в системе символьной математики.

#### Лабораторная работа 3.

Изучение z-преобразования для решения линейных разностных уравнений и его реализация в системах численной математики.

#### Лабораторная работа 4.

Построение структурных схем, отвечающих разностным уравнениям. Использование системы моделирования SIMULINK. Решение начальных и краевых задач.

#### Лабораторная работа 5

Численная реализация логистического отображения и отображения Эно. Исследование фазовых портретов и построение бифуркационных диаграмм в зависимости от параметров системы.

Для оценивания результатов каждой лабораторной используется *шкала*: «зачтено», «не зачтено».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения показаны в следующей таблице:

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
При выполнении лабораторной студент продемонстрировал в достаточной мере: знание основ составления компьютерных программ для решения типовых математических задач, имеющихся ресурсов для решения прикладных математических задач, умение использовать стандартные пакеты программного обеспечения для решения типовых математических задач, владение навыками хранения, поиска, сбора, систематизации, обработки и использования информации.	Достаточный уровень	Зачтено
При выполнении лабораторной студент не продемонстрировал в достаточной мере: знание основ составления компьютерных программ для решения типовых математических задач, имеющихся ресурсов для решения прикладных математических задач, умение использовать стандартные пакеты программного обеспечения для решения типовых математических задач, владение навыками хранения, поиска, сбора, систематизации, обработки и использования информации.	–	Не зачтено

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация в 4 семестре по дисциплине осуществляется в форме собеседования по экзаменационным билетам с помощью ниже приведенных оценочных средств (перечень вопросов к экзамену). Промежуточная аттестация включает в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний.

### Перечень вопросов к экзамену:

№№ п/п	Вопросы
1.	Примеры разностных уравнений.
2.	Решение однородных разностных уравнений
3.	Системы линейных разностных уравнений.
4.	Синтез разностных уравнений для получения заданных функций.
5.	Корневые векторы и циклические пространства.
6.	Жордановы цепочки векторов.
7.	Дифференциальные уравнения и жордановы цепочки векторов.
8.	Разностные уравнения и жордановы цепочки векторов.
9.	Определение z-преобразования.
10.	Решение разностных уравнений с помощью z-преобразования.
11.	Цифровые интеграторы и дискретные передаточные функции.
12.	Модели уравнений с начальными условиями.
13.	Моделирование уравнений с краевыми условиями.
14.	Матричное решение разностных уравнений.
15.	Источники нелинейных разностных уравнений.
16.	Решение нелинейных разностных уравнений.

17.	Анализ стационарных точек и точек бифуркации.
-----	---

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие **показатели**:

- 1) знание теоретических основ;
- 2) умение решать задачи
- 3) умение работать с алгоритмами методов и информационными ресурсами;
- 4) успешное прохождение текущей аттестации.

Для оценивания результатов экзамена используется **шкала**: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения показаны в следующей таблице:

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Полное соответствие обучающимся всем перечисленным показателям по каждому из вопросов контрольно-измерительного материала. Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами, применять теоретические знания для решения практических задач в области курса, студент умеет работать с различными источниками научной информации, грамотно и правильно представляет свои результаты, правильно отвечает на вопросы КИМ	Повышенный уровень	Отлично
Несоответствие ответа обучающегося одному из перечисленных выше показателей (к одному из вопросов контрольно-измерительного материала) и правильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы. <b>ИЛИ</b> Несоответствие ответа обучающегося любым двум из перечисленных показателей (либо двум к одному вопросу, либо по одному к каждому вопросу контрольно-измерительного материала) и правильные ответы на два дополнительных вопроса в пределах программы.	Базовый уровень	Хорошо
Несоответствие ответа обучающегося любым двум из перечисленных показателей и неправильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы. <b>ИЛИ</b> Несоответствие ответа обучающегося любым трем из перечисленных показателей (в различных комбинациях по отношению к вопросам контрольно-измерительного материала).	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Несоответствие ответа обучающегося любым из перечисленных показателей (в различных комбинациях по отношению к вопросам контрольно-измерительного материала).	–	Неудовлетворительно

## 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

Задания открытого типа:

1) Вставьте слово: Числа, удовлетворяющие разностному уравнению  $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$  образуют последовательность, которая называется числами (.....).

Ответ: Фибоначчи.

2) Найти общее решение разностного уравнения  $x_{k+2} - 5x_{k+1} + 6x_k = 0$

Ответ:  $x_k = c_1 3^k + c_2 2^k$

Решение. Характеристическое уравнение для такого разностного уравнения имеет вид  $z^2 - 5z + 6 = 0$ . Его корни вещественны и различные:  $z_1 = 3, z_2 = 2$ . Отсюда получается искомое общее решение.

3) Вставить слово: Если комплексные корни характеристического уравнения лежат внутри единичного круга, то решение разностного уравнения будет (.....).

Ответ: устойчивым

4) Определить стационарные точки логистического отображения  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$

Ответ:  $x_1 = 0, x_2 = 1 - \frac{1}{r}$

Решение: Нахождение стационарных точек основано на условии  $x = f(x, r)$ . Подставляя сюда выражение для  $f(x, r) = rx(1 - x)$ , получим квадратное уравнение, имеющее своим решением искомые корни.

5) Вставить слово: Всякий многочлен  $\varphi(\lambda)$ , для которого имеет место равенство  $\varphi(A)b = 0$  называется (.....) для вектора  $b$ .

Ответ: Аннулирующим

Задания закрытого типа:

1) Выражение для z-преобразования имеет вид:

а)  $F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}$ , б)  $F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-zt}$ , в)  $F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(zt)z^{-t}$

Ответ: а).

2) Верно ли, что хаос в системах, описываемых нелинейными разностными уравнениями, возникает даже в случае уравнений первого порядка?

Ответ: верно

Решение. Хаотическое поведение непрерывных систем возможно только для систем третьего и более высокого порядков. В дискретных системах детерминированный хаос возникает уже в системах первого порядка. Это связано с тем, что траектории дифференциальных уравнений должны удовлетворять требованиям гладкости и непрерывности. В дискретных системах такого рода ограничения отсутствуют.

3) Логистическое отображение имеет вид:

а)  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ , б)  $x_{n+2} = rx_n(1 - x_{n+1})$ , в)  $x_n = rx_{n+1}(1 - x_n)$ , г)  $x_{n+1} = rx_n(1 + x_n)$

Ответ: а)

4) Как выглядит z-преобразование показательной функции?

a)  $a^t \rightarrow \frac{z}{z-a}$ , б)  $a^t \rightarrow \frac{za}{z-a}$ , в)  $a^t \rightarrow \frac{z}{az-e}$ , г)  $a^t \rightarrow \frac{az}{z+1}$

Ответ : а)

5) Верно ли, что у логистического отображения существует только две стационарные точки, одна из которых устойчива, а устойчивость второй определяется значением параметра?

Ответ : верно

**Решение.** У логистического отображения существует две стационарные точки  $x_1 = 0, x_2 = 1 - \frac{1}{r}$ . Очевидно, что точка  $x_1$  является устойчивой, тогда как устойчивость точки  $x_2$  определяется значением параметра  $r$ .

#### **Критерии и шкалы оценивания заданий:**

**1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):**

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**2) Задания закрытого типа (множественный выбор):**

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

**3) Задания закрытого типа (на соответствие):**

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

**4) Задания открытого типа (короткий текст):**

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**5) Задания открытого типа (число):**

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**

